CHAPITRE 2

SÉRIES ENTIÈRES

2.1 Séries entières

Définition 2.1.1 On appelle série entière toute série de fonctions $\left(\sum f_n\right)$ dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$, où $(a_n)_n$ désigne une suite réelle ou complexe et $x \in \mathbb{R}$.

Une série entière est notée $\left(\sum a_n x^n\right)$. Comme pour les séries de fonctions, on cherche l'ensemble :

$$\Delta = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

qu'on appelle domaine de convergence de la série entière.

Exemple 2.1.1
Exemple 1 : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
Posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ et appliquons le critère de D'Alembert ;
$\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0$. La série entière est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$; donc $\Delta = \mathbb{R}$.
Exemple 2 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
Posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$ on a : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 x\right| = |x|$.
Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.
Etudions le cas où $|x| = 1$.
on a $\left|f_n(x)\right| = \dfrac{|x|^n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}\cdot$ La série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est alors absolument convergente dans $[-1, 1]$; et alors $\Delta = [-1, 1]$

Exemple 3 : $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Cette série ne converge que si $x = 0$ car $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} |(n+1)x|$ et la limite n'existe que si $x = 0$: d'où : $\Delta = \{0\}$.

Exemple 4 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ on a $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)x\right| = |x|$. Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.

Etudions le cas où $|x| = 1$.

$x = 1$: c'est la série harmonique $\left(\sum \frac{1}{n}\right)$, elle est divergente.

$x = -1$: c'est la série harmonique alternée $\left(\sum \frac{(-1)^n}{n}\right)$, elle est convergente.

D'où : $\Delta = [-1, 1[$.

Lemme 2.1.1 (Lemme d'Abel)

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_n$ soit bornée. Alors :

1. *La série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.*
2. *La série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est normalement convergente pour $|x| < r$ pour tout $0 < r < |x_0|$.*

Preuve.

La suite $(a_n x_0^n)_n$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n x_0^n| \leq M$.

1.) Pour $|x| < |x_0|$:

$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ · La série $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ est une série géométrique de raison $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, donc convergente. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ est convergente et par conséquent la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < |x_0|$.

2.) Soit $0 < r < |x_0|$ et soit $|x| \leq r$.

$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n x_0^n x^n}{x_0^n}\right| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{x_0}\right|^n$ · Comme $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{x_0}\right)^n$ est une série numérique convergente, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est normalement convergente pour tout x tel que $|x| < r$ et tout r tel que $0 < r < |x_0|$.

2.2 Rayon de convergence d'une série entière

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

Théorème 2.2.1

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière ; alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que :

1. *$\left(\sum a_n x^n\right)$ converge absolument dans $]-R, R[$.*
2. *$\left(\sum a_n x^n\right)$ diverge si $|x| > R$.*

Preuve.

Soit $I = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{converge} \right\} \subset \mathbb{R}^+$. $I \neq \emptyset$ car $0 \in I$.
On distinguera trois cas : $I = \{0\}$, $I = \mathbb{R}^+$ et $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^+$.
1) $I = \{0\}$. On pose $R = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Ceci implique que $|x| > 0$ et par suite $x \notin I$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ diverge. Montrons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge. Pour cela, on raisonnera par l'absurde. Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| > 0$.

Soit $x_1 \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |x_1| < |x|$. La série $\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|\right)$ est convergente d'après le lemme d'Abel (2.1.1) et donc $x_1 \in I$. D'où la contradiction avec le fait que $I = \{0\}$.
2) $I = \mathbb{R}^+$. On pose $R = \infty$. On doit prouver que $\left(\sum a_n x^n\right)$ est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge pour tout $r > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Il existe $r > 0$ tel que $|x| < r$. Ceci implique $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$ et d'après le théorème de comparaison la série $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge absolument.
3) $\{0\} \subset I \subset \mathbb{R}^*$, $I \neq \{0\}$ et $I \neq \mathbb{R}^*$.
a) I est majoré. En effet, soit $r \in \mathbb{R}^* \backslash I$ et supposons que r n'est pas un majorant de I. Il existerait alors $r_1 \in I$ tel $r < r_1$. D'après la définition de I, la série $\left(\sum |a_n| r_1^n\right)$ est convergente ainsi que $\left(\sum |a_n| r^n\right)$ (car $|a_n| r^n < |a_n| r_1^n$) et donc $r \in I$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $r \in \mathbb{R}^* \backslash I$.
I est alors un ensemble non vide et majoré donc admet une borne supérieure $R = \sup_{r \in I} I$. Pour conclure, on doit prouver que $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge absolument pour tout x, $|x| < R$ et diverge pour tout x, $|x| > R$.
b)Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R$. Il existe $\rho \in I$ tel que $|x| < \rho < R$. Comme la série $\left(\sum |a_n| \rho^n\right)$ converge, $\left(\sum |a_n| \cdot |x^n|\right)$ converge en vertu du théorème de comparaison. $\left(\sum a_n x^n\right)$ est alors absolument convergente.
c) Soit $x \in \mathbb{R}$, $|x| > R$. Ceci implique que $|x| \notin I$ et donc la série $\left(\sum |a_n x^n|\right)$ diverge. Montrons que $\left(\sum a_n x^n\right)$ diverge. Pour cela, on raisonne par l'absurde. Si $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge, d'après

le lemme d'Abel, (2.1.1) la série $\left(\sum a_n x_1^n\right)$ est absolument convergente pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$, vérifiant $R < |x_1| < |x|$ et donc $|x_1| \in I$. On a alors nécessairement $|x_1| \leq R = \sup_{r \in I} I$ et ceci est en contradiction avec l'hypothèse $R < |x_1| < |x|$.

Définition 2.2.1 Le nombre $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ : \left(\sum |a_n| r^n\right) \text{ converge }\right\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série $\left(\sum a_n x^n\right)$.

Remarque 2.2.1 Le rayon de convergence d'une série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est caractérisé par :

1. $|x| < R \Longrightarrow \left(\sum a_n x^n\right)$ est absolument convergente.
2. $|x| > R \Longrightarrow \left(\sum a_n x^n\right)$ diverge.
3. $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.
4. Pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r < R$, la série $\left(\sum a_n x^n\right)$ est normalement (donc absolument) convergente pour $|x| \leq r$.

2.2.1 Détermination du rayon de convergence

Lemme 2.2.1 (Lemme d'Hadamard)

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ une série entière. Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Preuve.

a) Posons $\ell = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. En utilisant le critère de d'Alembert on a :

$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| = \ell |x|$. Ceci implique :

$\alpha)$ $\left(\ell|x| < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{1}{\ell}\right) \Longrightarrow$ la série est absolument convergente

$\beta)$ $\left(\ell|x| > 1 \Longleftrightarrow |x| > \frac{1}{\ell}\right) \Longrightarrow$ la série est divergente

D'après la remarque (2.2.1), $R = \frac{1}{\ell}$.

b) Posons $\ell = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. En utilisant le critère de Cauchy :

$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \ell |x|$ puis on adopte le même raisonnement que précédemment, on aboutit à la même conclusion ; $R = \frac{1}{\ell}$.

Exemple 2.2.1

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

   On a $a_n = \frac{1}{n!}$, utilisons le critère de D'Alembert :
   $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$, donc le rayon de convergence est $R = \infty$.
   La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

   On a $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{n}{n+1}\right|^2 = 1$. Le rayon de convergence est $R = 1$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

   Le critère de Cauchy donne :
   $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1$, le rayon de convergence est $R = 2$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 2$ et divergente si $|x| > 2$.

Remarque 2.2.2 Soit ϕ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série de suivante $\left(\sum a_n x^{\varphi(n)}\right)$ est une série entière. On commence par calculer directement la limite suivante ;

$$\ell = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \lim_{n\longrightarrow\infty} |x|^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}$$

puis chercher le domaine de x où $\ell < 1$; R est donc $\sup\left\{\ell \in \overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}\right\}$ où notre série converge.

Exemple : Trouver le rayon de convergence de la série : $\left(\sum 3^n x^{2n+5}\right)$. Dans notre cas $\varphi(n) = 2n+5$.

$$\ell = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left|\frac{3^{n+1}x^{2n+7}}{3^n x^{2n+5}}\right| = 3|x|^2$$

la série converge si $3|x|^2 < 1 \Longleftrightarrow |x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ d'où le rayon de convergence est : $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et divergente si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.3 Propriétés

Ce paragraphe étudie les propriétés de continuité, de dérivabilité et d'intégrabilité de la fonction somme des séries entières.

2.3.1 Continuité d'une série entière

Proposition 2.3.1

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ *une série entière de rayon de convergence R et soit*
$f :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *f est alors continue.*

Preuve.
Soit $0 < r < R$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x) = a_n x^n$ sont continues dans $[-R, R]$ et puisque la convergence est normale donc uniforme dans $[-r, r]$, f est alors continue dans $[-r, r]$ pour tout r, $0 < r < R$ donc continue dans $]-R, R[$.

2.3.2 Dérivée d'une série entière

Définition 2.3.1 Une fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. On la note $f'(x_0)$.

Définition 2.3.2 *Une fonction f est dite de classe* C^n *sur un intervalle I de* $\mathbb{R}$, *si sa dérivée d'ordre n est une fonction continue sur I. On notera alors que* $f \in C^n(I)$.
Si elle est indéfiniment (ou infiniment) dérivable, on dira alors qu'elle est de classe C-infinie et on écrira que $f \in C^\infty(I)$.
Par contre $f \in C^0(I)$, *signifie que f est seulement continue sur I.*

Proposition 2.3.2

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ *une série entière de rayon de convergence R, et soit*
$f :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. *Alors f est dérivable et on a*
$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Preuve.
Soient les fonctions $S_n :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ définies par $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Ces fonctions possèdent les propriétés suivantes :
i) $\lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$ et la convergence est absolue donc simple.
ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, S_n est dérivable et on a $S'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.
iii) Le rayon de convergence de $\left(\sum n a_n x^{n-1}\right)$ est R car $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$.
La suite $(S'_n)_n$ est uniformément convergente dans $[-r, r]$.
f est dérivable et on a $f'(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\forall x \in [-r, r]$ et $\forall r \in]0, R[$.

Donc $f'(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\forall x \in]-R, R[$.

Corollaire 2.3.1

Soit la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *de rayon de convergence* R *;* f *est indéfiniment dérivable* $(f \in C^{\infty}(]-R, R[))$ *; et l'on a :*

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n.$$

Preuve.

En effet, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, par application de la proposition précédente on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, et par récurrence, la dérivée d'ordre k est donnée par la relation :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

De cette expression, il résulte que $f^{(k)}(0) = a_k k!$; c'est-à-dire que $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

2.3.3 Primitive d'une série entière

Définition 2.3.3
Une fonction $f : D \longmapsto \mathbb{R}$ *admet une primitive s'il existe une fonction* $F : D \longmapsto \mathbb{R}$ *vérifiant* $F' = f$ *; (*D *étant le domaine de définition de* f *).*

Proposition 2.3.3

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$ *une série entière de rayon de convergence* R *et soit* $f :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*. On considère la fonction* $F :]-R, R[\longmapsto \mathbb{R}$ *définie par* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*. Alors* $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in]-R, R[$*.*

Preuve.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est R car $\lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{a_n} \right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}$. D'après le théorème précédent on conclut que $F' = f$.

Remarque 2.3.1 Dans le cas réel, si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in]-R, R[$, $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$.

2.3.4 Opérations sur les séries entières

Proposition 2.3.4

Soit $\left(\sum a_n x^n\right)$,$\left(\sum b_n x^n\right)$ *deux séries entières ayant respectivement* R *et* R' *pour rayon de convergence.*

1. *Si* $R \neq R'$*, le rayon de convergence* R'' *de la série* $\left(\sum (a_n + b_n)x^n\right)$ *est* $R'' = \min\{R, R'\}$.
2. *Si* $R = R'$ *le rayon de convergence de la série* $\left(\sum (a_n + b_n)x^n\right)$ *est* $R'' \geq R$.

Preuve.
1) Supposons que $R' < R$.
i) $|x| < R' \implies |x| < R$. Les deux séries $\left(\sum a_n x^n\right)$ et $\left(\sum b_n x^n\right)$ sont absolument convergentes. Comme $|(a_n + b_n)x^n| \leq |a_n x^n| + |b_n x^n|$, il en découle que $\sum((a_n + b_n)x^n)$ converge absolument pour $|x| < R' = \min\{R, R'\}$.
ii) Si $|x| > R'$, deux cas de figure se présentent :

a) Si $R' < |x| < R$, la série $\left(\sum b_n x^n\right)$ converge absolument et $\left(\sum a_n x^n\right)$ diverge. Donc $\left(\sum (a_n + b_n)x^n\right)$ diverge.

b) Si $R' < R < |x|$, les deux séries divergent. Montrons $\left(\sum (a_n + b_n)x^n\right)$ diverge. Raisonnons par l'absurde. Si $\left(\sum (a_n + b_n)x^n\right)$ converge alors d'après le lemme d'Abel (2.1.1), la série $\left(\sum (a_n + b_n)x^n\right)$ converge absolument pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $|x_0| < |x|$ et en particulier pour x_0 vérifiant $R' < |x_0| < R < |x|$. D'où la contradiction.
2) Si $R = R'$. Il est clair que la série converge absolument si $|x| < R = R'$. Le rayon de convergence $R'' \geq R = R'$.

Exemple 2.3.1 *Soient les deux séries* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ *et* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{2^n} x^n$*. Les deux séries ont pour rayon de convergence* $R = 1$*. Par contre la série somme* $(f + g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$*, a pour rayon de convergence* $R'' = 2$.

2.4 Séries de Taylor

Problème

Soit f une fonction réelle à variable réelle x. Peut-on trouver une suite réelle $(a_n)_n$ et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-r, r[$?
Si ce problème admet une solution, on dit que f est développable en série entière au voisinage de 0.
On peut généraliser cette situation en se posant la même question pour une fonction définie au voisinage d'un point x_0 :

Existe-il une suite $(a_n)_n$ et $r > 0$ tels que l'on ait $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ pour $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$?
Dans l'affirmatif, on dira que f est développable en série entière au voisinage de x_0.

Proposition 2.4.1

Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est nécessaire qu'elle soit de classe C^∞ dans un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de x_0 et dans ce cas on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Preuve.
Il suffit de remarquer que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, alors et d'après le corollaire (2.3.1) on a $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Proposition 2.4.2

Soit $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ dans un voisinage de 0. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]-r, r[$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est simplement convergente dans $]-r, r[$ et on a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ \forall x \in]-r, r[$

Preuve.
Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]-r, r[$ on a $\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M$.
Le développement de Taylor de f au voisinage de 0 à l'ordre n donne :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, avec $0 < \theta < 1$.

Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.
En effet,
$x \in]-r, r[\Longrightarrow |x| < r \Longrightarrow |\theta x| < r \Longrightarrow |f^{(n+1)}(\theta x)| \leq M$;
et donc $\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \leq \frac{M r^{n+1}}{(n+1)!}$.

Or la série de terme général $u_n = \frac{M r^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente car ;
$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{r}{n+1} = 0$ et par suite $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$,
ce qui donne $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Remarque 2.4.1 *Il suffit de vérifier que le reste de Taylor, souvent appelé reste de Mac-Laurin , tend vers 0.*
C'est à dire que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$,

Exemple 2.4.1
1) **La fonction exponentielle** : $f(x) = e^x$.
Cette fonction est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x$. Le reste de Mac-Laurin est : $\dfrac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. On vérifie comme précédemment, que cette limite tend vers zéro quand n tend vers ∞ ; et ceci quelque soit x dans $\mathbb{R}$.
Finalement :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2) **Les fonctions hyperboliques** :
Les fonctions cosinushyperboliques et sinushyperboliques ont même rayon de convergence que la fonction exponentielle, c'est à dire $R = \infty$.

$$\operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3) **Les fonctions circulaires** :
a) La fonction sinus :

$$\begin{array}{llllll}
f(x) = \sin x & \Longrightarrow & f(0) = 0, & \text{et} & \forall p \in \mathbb{N} & f^{(4p)}(x) = \sin x \Longrightarrow f^{(4p)}(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & \Longrightarrow & f'(0) = 1, & \text{et} & \forall p \in \mathbb{N} & f^{(4p+1)}(x) = \cos x \Longrightarrow f^{(4p+1)}(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & \Longrightarrow & f''(0) = 0, & \text{et} & \forall p \in \mathbb{N} & f^{(4p+2)}(x) = -\sin x \Longrightarrow f^{(4p+2)}(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & \Longrightarrow & f'''(0) = -1, & \text{et} & \forall p \in \mathbb{N} & f^{(4p+3)}(x) = -\cos x \Longrightarrow f^{(4p+3)}(0) = -1
\end{array}$$

Les dérivées d'ordre quelconques sont majorées par 1, et ceci quelque soit x dans $\mathbb{R}$. On a alors :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{et} \quad R = \infty.$$

b) La fonction cosinus :

$$f(x) = \cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \text{et} \quad R = \infty.$$

4) **La série du binôme**
Considérons la fonction $x \longrightarrow f(x) = y = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Son domaine de définition est $]-1, \infty[$.
On a une relation simple entre la fonction f et sa dérivée.
$y = (1+x)^\alpha$, on a $y' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ d'où l'équation différentielle :

$$y'(1+x) = \alpha y \tag{2.1}$$

Toutes les solutions de cette équation sont de la forme $y = C(1+x)^\alpha$, où C est une constante arbitraire. Cherchons maintenant s'il existe une fonction f développable en série entière au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui est solution de (2.1). Pour qu'une telle fonction existe, il

est nécessaire d'avoir les relations :
$0 = (1+x)f'(x) - \alpha f(x) = (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} - (\alpha - n)a_n]x^n.$
On déduit alors que $(n+1)a_{n+1} - (\alpha-n)a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $(n+1)a_{n+1} = (\alpha-n)a_n$ car une série entière est nulle si et seulement tous ses cœfficient sont nuls. Ceci permet d'avoir :

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha a_0 \\ a_2 &= \frac{(\alpha-1)a_1}{2} \\ \vdots &\ \vdots\ \vdots \\ a_{n-1} &= \frac{(\alpha-n+2)a_{n-2}}{n-1} \\ a_n &= \frac{(\alpha-n+1)a_{n-1}}{n} \end{aligned}$$

. Ceci donne enfin

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}a_0$$

Soit la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$. Le rayon de convergence R est donné par la relation :
$\frac{1}{R} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}\frac{n!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}\right| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1.$
Par construction, la série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}a_0 x^n$ est solution de l'équation différentielle (2.1) , elle est donc de la forme $f(x) = C(1+x)^\alpha$. Puisque $f(0) = a_0 = C = 1$, on déduit que pour $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n; \quad R = 1.$$

Cette série est connue sous le nom de série du binôme.

Remarque 2.4.2 *Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors les dérivées d'ordre $n+1$ et plus de $(1+x)^n$ sont toutes nulles. La série du binôme se réduit à un polynôme de degré n, et on retrouve la formule du binôme de Newton.*

Exercices d'applications.
En utilisant le résultat ci-dessus, montrer qu'on a les développements suivants. Donner le domaine de convergence de ces séries.
a) $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$
b) $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...2n}x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots.$

Remarque 2.4.3
Un développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction f peut s'obtenir grâce au développement de sa dérivée f'. Par exemple, le développement en série entière des fonctions $\arcsin x$ s'obtient facilement en remarquant que :
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \cdots$. Sachant que $\arcsin 0 = 0$,
$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \cdots$.
Par ce procédé, il est facile par exemple de développer les fonctions $x \longrightarrow \arccos x$, $x \longrightarrow \operatorname{Argsh} x$, $x \longrightarrow \operatorname{Arctg} x$ et $x \longrightarrow \operatorname{Argth} x$.
Attention : la fonction $x \longrightarrow \operatorname{Argch} x$ n'est pas définie dans un voisinage de zéro, son domaine de définition est $[1, \infty[$.

5) **La fonction** $x \longrightarrow \dfrac{1}{1-x}$.
On remarque d'une part que pour $|x| < 1$, $\lim |x|^n = 0$ et d'autre part
$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$.
D'où :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ avec } R = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \ (R = 1).$$

6) **La fonction** $x \longrightarrow \operatorname{Log}(1+x)$.
Certains développements en série s'obtiennent au moyen des théorèmes sur l'intégration et la dérivation des séries entières.
Du développement $\dfrac{1}{1+x}$ on déduit par intégration :
$\operatorname{Log}(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, $(R = 1)$. La constante d'intégration est nulle car $\operatorname{Log} 1 = 0$.
On a de même $\operatorname{Log}(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$, $(R = 1)$.
On remarque que ces fonctions sont définies aussi pour des valeurs n'appartenant pas à l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ mais leurs développements en série de Taylor au voisinage de 0 ne sont convergents que pour $|x| < 1$.
Formule très utile, donc à retenir :

$$\forall\, x \in [-1, 1[: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\operatorname{Log}(1-x), \quad \underline{R = 1}.$$

2.4.1 Développement en série entière au voisinage d'un point x_0

Soit $x \longrightarrow f(x)$ une fonction définie au voisinage d'un point x_0 et posons $X = x - x_0$.

Définition 2.4.1 On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 si la fonction $X \longrightarrow f(X + x_0)$ est développable en série entière au voisinage de 0. On aura alors :

$$f(X+x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n \text{ pour} |X|<R.$$

Donc $f(x)=f(X+x_0)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ pour tout x vérifiant $|x-x_0|<R$

Exemple 2.4.2 On cherche le développement en série entière de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ au voisinage de $x_0=3$. On pose $X=x-3$ et on obtient :
$\sqrt{x}=\sqrt{X+3}=\sqrt{3\left(1+\frac{X}{3}\right)}=\sqrt{3}\left(1+\frac{X}{3}\right)^{1/2}=\sqrt{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}\left(\frac{X}{3}\right)^n\right)$
Finalement : $\sqrt{x}=\sqrt{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\cdot\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}(x-3)^n\right)$.

Domaine de convergence de cette série. Puisque la série entière en $\frac{X}{3}$ a pour rayon de convergence $R=1$, ce qui veut dire que pour
$\left|\frac{X}{3}\right|<1\iff -3<X<3\iff -3<x-3<3\iff 0<x<6$,
la série est absolument convergente.
Pour $x=0$, on a : $\sqrt{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n}\cdot\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}(-3)^n\right)=\sqrt{3}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}\right)$.

Le le critère de Duhamel montre que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}$ est convergente.

Pour $x=6$, c'est la même série mais alternée, donc convergente, car absolument convergente.
En conclusion, la série trouvée a pour domaine de convergence : $\Delta=[0,6]$.

Remarque 2.4.4 *On tire deux conclusions intéressantes.*
Le cas $x=0$ donne :
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}=1$
Le cas $x=6$ donne :
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3...(2n-3)}{2.4...2n}=\sqrt{2}-1$

2.4.2 Sommation de quelques séries entières

ON peut dans certains cas reconnaître, dans une série entière, le développement d'une fonction connue ; trouver cette fonction, c'est faire la sommation de la série entière. Ce problème est l'inverse de celui qui a été étudié précédemment.

1er exemple

Soit la série entière $\left(\sum a_nx^n\right)$, le terme a_n est de la forme : $a_n=\frac{P(n)}{n!}$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m.
on met $P(n)$ sous la forme :

$P(n)=\alpha_0+\alpha_1 n+\alpha_2 n(n-1)+\alpha_3 n(n-1)(n-2)+\cdots=\alpha_0+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k n(n-1)\cdots(n-k+1).$

On a : $P(k)=\alpha_0+\alpha_1 k+\alpha_2 k(k-1)+\alpha_3 k(k-1)(k-2)+\cdots+\alpha_k k!$, cette relation de récurrence permet de calculer toutes les valeurs de α_k. On calcule α_0, puis α_1, puis α_2 jusqu'à α_m.
exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-4n^4+25n^3-49n^2+31n+2)\frac{x^n}{n!}$$

son rayon de convergence étant l'infini, posons : $P(n)=-4n^4+25n^3-49n^2+31n+2$
$=\alpha_0+\alpha_1 n+\alpha_2 n(n-1)+\alpha_3 n(n-1)(n-2)+\alpha_4 n(n-1)(n-2)(n-3).$
Pour $n=0$ on a $P(0)=\alpha_0=2$
Pour $n=1$ on a $P(1)=\alpha_0+\alpha_1=5=2+\alpha_1 \iff \alpha_1=3$
Pour $n=2$ on a $P(2)=\alpha_0+2\alpha_1+2\alpha_2=4 \iff \alpha_2=-2$
Pour $n=3$ on a $P(3)=\alpha_0+3\alpha_1+6\alpha_2+6\alpha_3=5 \iff \alpha_3=1$
Pour $n=4$ on a $P(4)=\alpha_0+4\alpha_1+12\alpha_2+24\alpha_3+24\alpha_4=-82 \iff \alpha_3=-4$
$-4n^4+25n^3-49n^2+31n+2=2+3n-2n(n-1)+n(n-1)(n-2)-4n(n-1)(n-2)(n-3).$
La somme est alors :

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{n!}+\frac{3n}{n!}-\frac{2n(n-1)}{n!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n!}-\frac{4n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}\right)x^n\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{(n-3)!}-4\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{(n-4)!}\\&=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+3x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}-2x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+x^3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n-3}}{(n-3)!}-4x^4\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^{n-4}}{(n-4)!}\\&=\left(2+3x-2x^2+x^3-4x^4\right)e^x\end{aligned}$$

2ème exemple

Soit la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)$, le terme a_n est de la forme : $a_n=P(n)$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m.
on met $P(n)$ sous la forme :

$$P(n)=\alpha_0+\alpha_1(n+1)+\alpha_2(n+1)(n+2)+\alpha_3(n+1)(n+2)(n+3)+\cdots$$
$$\alpha_0+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(n+1)(n+2)\cdots(n+k).$$

On a : $P(k)=\alpha_0+\alpha_1(k+1)+\alpha_2(k+1)(k+2)+\alpha_3(k+1)(k+2)(k+3)+\cdots+\alpha_k\frac{(k+m)!}{k!}$, cette relation de récurrence permet de calculer toutes les valeurs de α_k. On calcule α_0, puis α_1, puis α_2 jusqu'à α_m.
exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^3+9n^2+20n+11)x^n$$

son rayon de convergence étant égal à 1. Posons :
$P(n)=n^3+9n^2+20n+11=\alpha_0+\alpha_1(n+1)+\alpha_2(n+1)(n+2)+\alpha_3(n+1)(n+2)(n+3)$ Pour $n=-1$ on a $P(-1)=\alpha_0=-1$

Pour $n = -2$ on a $P(-2) = \alpha_0 - \alpha_1 = -1 = -1 - \alpha_1 \iff \alpha_1 = 0$
Pour $n = -3$ on a $P(-3) = \alpha_0 - 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 5 \iff \alpha_2 = 3$
Pour $n = -4$ on a $P(-4) = \alpha_0 - 3\alpha_1 + 6\alpha_2 - 6\alpha_3 = 11 \iff \alpha_3 = 1$
D'où : $P(n) = -1 + 3(n+1) + (n+1)(n+2)(n+3)$,
et donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1 + 3(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3))x^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$$

Les trois sommes se déduisent de la série géométrique. • $-\sum_{n=0}^{\infty} x^n = -\frac{1}{1-x}$

• $3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n = 3\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' = 3\left(\frac{1}{1-x} - 1 - x\right)''$

$$= 3\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)' = \frac{6}{(1-x)^3}$$

• $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3}\right)''' = \left(1 + x + x^2 + \frac{1}{1-x}\right)'''$

$$= \left(1 + 2x + \frac{1}{(1-x)^2}\right)'' = \left(2 + \frac{-2}{(1-x)^3}\right)' = \frac{6}{(1-x)^4}$$

On a :

$$f(x) = -\frac{1}{1-x} + \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{6}{(1-x)^4} = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x + 11}{(1-x)^4}$$

pour x réel la série ne converge pas aux bornes de l'intervalle de convergence. Le domaine de convergence est alors $]-1, 1[$.

3ème exemple

Soit la série entière $\left(\sum a_n x^n\right)$, le terme a_n est de la forme : $a_n = \frac{1}{P(n)}$ où $P(n)$ étant un polynôme en n de degré m avec des racines simples et entières.

On décompose a_n éléments simples et on utilisera la formule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\operatorname{Log}(1-x)$.

Exemple : Sommer la série suivante.

$$f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)(n+1)(n+3)}$$

son rayon de convergence est égal à 1. Posons :
La décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{1}{(n-2)(n+1)(n+3)} = \frac{1}{15(n-2)} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{10(n+3)}$$

• $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} = x^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x^2\left(-\operatorname{Log}(1-x)\right) = -x^2 \operatorname{Log}(1-x)$

• $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{1}{x}\left(-\operatorname{Log}(1-x)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)$

• $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n+3}=\frac{1}{x^3}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+3}=\frac{1}{x^3}\sum_{n=6}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\frac{1}{x^3}\left(-\operatorname{Log}(1-x)-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right).$

On obtient finalement

$$f(x)=\frac{1}{1800x^3}\left[\left(-120x^5+300x^2-180\right)\operatorname{Log}(1-x)+64x^5+105x^4+240x^3-90x^2-180x\right]$$

Remarques :

1. La limite de $f(x)$ quand x tend vers 1 est bien finie, car $-120x^5+300x^2-180=-60(2x^3+4x^2+6x+3)(1-x)^2$ et elle vaut 679/1800.

2. Un développement limité au voisinage de 0 de $(-120x^5+300x^2-180)\operatorname{Log}(1-x)+64x^5+105x^4+240x^3-90x^2-180x$ montre Aussi que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est bien finie et vaut $f(0)=0$

3. Puisque la série donnée est convergente pour $x=-1$, le domaine de convergence de la série est donc $[-1,1]$.

4. On déduit de ces calculs et ces remarques que :

$\displaystyle f(1)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n+1)(n+3)}=\frac{139}{1800}$

$\displaystyle f(-1)=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-2)(n+1)(n+3)}=\frac{109-240\operatorname{Log}2}{1800}$

En utilisant toujours la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\operatorname{Log}(1-x)$, on peut sommer des séries de type $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty}\frac{x^n}{an+b}$ avec $a\in\mathbb{N}^*$, $b\in\mathbb{Z}^*$ et $\dfrac{b}{a}\notin\mathbb{Z}^*$.

4ème exemple

Sommer la série suivante,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$$

son rayon de convergence est égal à 1. On a $f(0)=1$.

• 1er cas $x>0$:

$\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}}{2n+1}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}.$

Posons $0<\sqrt{x}=t\in]0,1[$ on a alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$ par dérivation puis intégration on obtient :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+t}{1-t}$ et donc :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\begin{cases}1 & \text{si}\quad x=0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{Log}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si}\quad x\in]0,1[\end{cases}$$

• 2ème cas $x < 0$:

Posons $x = -X$ on a $f(-X) = g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n X^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{X}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{X}\right)^{2n+1}}{2n+1}$ ·.

Posons $\sqrt{X} = t \in]0,1[$ on a alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{X}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$ par dérivation puis intégration on obtient :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} = \text{Arctg}\, t$ et en conclusion finale on a donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{Log} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ \frac{\text{Arctg}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\end{cases}$$

Remarque : Les fonctions trouvées sont continues en 0 et valent 1. Pour le domaine de convergence de la série étudiée est $D_f = [-1,1[$ et on trouve pour $x = -1$:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \text{Arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$

5ème exemple

De la même manière on peut sommer des séries de type :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

son rayon de convergence est égal à l'infini. On a $f(0) = 1$.

• $x > 0$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \text{ch}\sqrt{x}$.

• $x < 0$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos\sqrt{-x}$.

Beaucoup de séries ne peuvent être sommer à l'aide de fonctions élémentaires, et ceci malgré leur simple écriture.

6ème exemple **La fonction de Lax :**

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

La série étant normalement convergente pour tout $x \in [-1,1]$. Facilement on trouve :

$$\sigma'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{-\text{Log}(1-x)}{x},$$

fonction dont la primitive n'est pas « une fonction élémentaire. »
Il existe une relation fonctionnelle intéressante pour $\sigma(x)$. On a :

$$\sigma(x) = -\int_0^x \frac{\text{Log}(1-t)}{t}dt$$

C'est une intégrale impropre en 0 et en 1. La limite en 0 de $\dfrac{-\text{Log}(1-x)}{x}$ vaut 1, au voisinage de 1, on a : $\dfrac{\text{Log}(1-t)}{t} \sim \text{Log}(1-t)$ dont l'intégrale existe. une simple intégration par partie donne :

$$\sigma(x) = -\left[\text{Log}(1-t)\,\text{Log}\,t\right]_0^x + \int_0^x \frac{\text{Log}\,t}{1-t}dt$$

on a $\lim\limits_{t\longrightarrow 0}(\text{Log}(1-t)\,\text{Log}\,t) = 0$, un changement de variables $X = 1-t$ dans la dernière intégrale donne :

$$\int_0^x \frac{\text{Log}\,t}{1-t}dt = \int_1^{1-x} \frac{-\text{Log}(1-X)}{X}dX = -\int_1^0 \frac{\text{Log}(1-X)}{X}dX - \int_0^{1-x} \frac{\text{Log}(1-X)}{X}dX$$

On verra au chapitre sur les séries de Fourier que

$$-\int_1^0 \frac{\text{Log}(1-X)}{X}dX = \int_0^1 \frac{\text{Log}(1-X)}{X}dX = \sigma(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En conclusion on a :

$$\forall x \in]0,1[\quad \sigma(x) + \sigma(1-x) + \text{Log}\,x\,\text{Log}(1-x) = \frac{\pi^2}{6} \qquad (\star)$$

Remarques :
• La formule $(\star)$ reste valable pour $x \in [0,1]$, car $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \text{Log}\,x\,\text{Log}(1-x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} -x\,\text{Log}\,x = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \text{Log}\,x\,\text{Log}(1-x) = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \text{Log}(1-t)\,\text{Log}\,t = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} -t\,\text{Log}\,t = 0$
• $x \in [0;1/2] \Longleftrightarrow 1-x \in [1/2;1]$, connaissant les images de tous les nombres de l'intervalle $[0,1/2]$ on peut déduire celles des nombres de l'intervalle $[1/2,1]$; et généralement si a et b sont deux nombres réels de $[0;1]$ tels que $a+b=1$ alors on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \text{Log}\,a\,\text{Log}(1-a) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^2}$$

• En posant $x = 1/2$ on obtient $2\sigma(1/2) + \text{Log}^2(1/2) = \pi^2/6$ d'où

$$\sigma(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\text{Log}^2\,2 \sim 0.58224$$

6ème exemple
Donner le rayon de convergence de la série suivante puis calculer sa somme :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$$

On a immédiatement

$$1/R = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\left|n^{(-1)^n}\right|} = \begin{cases} \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[2n]{|2n|} = 1 & \text{si} \quad n \quad \text{est paire} \\ \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[2n+1]{|1/2n+1|} = 1 & \text{si} \quad n \quad \text{est impaire} \end{cases}$$

D'où $R = 1$.

On peut écrire cette somme sous la forme :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4x^4 + \frac{1}{5}x^5 + 6x^6 + \frac{1}{7}x^7 + 8x^8 + \cdots \\ &= \left(2x^2 + 4x^4 + 6x^6 + 8x^8 + \cdots\right) + \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

La première série est divergente pour $x = \pm 1$, donc le domaine de convergence de la série donnée est $]-1, 1[$, (La $2^{\text{ème}}$ série est aussi convergente pour $x = \pm 1$).

On peut écrire :

$$f(x) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\right)' + \operatorname{Arctg} x = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n\right)' + \operatorname{Arctg} x.$$

pour obtenir finalement

$$f(x) = x\left(\frac{1}{1-x^2}\right)' + \operatorname{Arctg} x = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \operatorname{Arctg} x \qquad \forall x \in]-1, 1[.$$

Comme application on a pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(-1)^n}}{\sqrt{3^n}} = \frac{\pi + 9}{6} \sim 2,0236.$$

Exercice 1 *Résoudre l'équation différentielle suivante ; en utilisant les séries entières :*

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution :

Posons $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

On a : $y'' = 2.1.a_2 + 3.2a_3x + 4.3.a_4x^2 + 5.4.a_5x^3 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

En substituant dans notre équation différentielle, on trouve :

$2.1.a_2 + (3.2a_3 - a_0)x + (4.3.a_4 - a_1)x^2 + (5.4.a_5 - a_2)x^3 + \cdots + ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n + \cdots = 0.$

On obtient les équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} 2.1.a_2 = 0 \\ 3.2a_3 - a_0 = 0 \\ 4.3.a_4 - a_1 = 0 \\ 5.4.a_5 - a_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

On constate que $y(0) = 1 \Longrightarrow a_0 = 1$ et $y'(0) = 0 \Longrightarrow a_1 = 0$, comme la première équation algébrique donne aussi $a_2 = 0$, on a alors
$a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = \dfrac{1}{2.3} = \dfrac{1}{3!} \quad a_4 = a_5 = 0, \quad a_6 = \dfrac{1}{2.3.5.6} = \dfrac{4}{6!}, \quad a_7 = a_8 = 0,$
$a_9 == \dfrac{1}{2.3.5.6.8.9} = \dfrac{4.7}{9!}$. On remarque que seulement les cœfficients $a_{3n},\ n \in \mathbb{N}$ sont non nuls.
On obtient finalement :

$$a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{3n} = \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{(3n)!}.$$

La solution ainsi construite sera :

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.4.7\dots(3n-2)}{(3n)!} x^{3n}.$$

Son domaine de convergence est donné par la règle de d'Alembert, on trouve que $R = \infty$. La série est convergente pour tout x dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.4.5 α : *Le même problème avec d'autres conditions, par exemple :*

$$\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On a une autre solution, et on trouve $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ et :

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.5.8\dots(3n-1)}{(3n+1)!} x^{3n+1}.$$

β : *L'équation $y'' - xy = 0$ a pour solution générale $y(x) = a.y_1(x) + b.y_2(x)$, où a et b sont deux réels quelconques.*
y_1 et y_2 sont deux fonctions spéciales, qu'on ne peut pas exprimer à l'aide de fonctions élémentaires.